

약의존성 잡음에서 몇가지 신호검파 방식들의 성능특성

正會員 金泰賢*, 金光淳**, 柳尙佑**, 宋翊鎬**

**Performance Characteristics of Some Signal Detectors in
Weakly Dependent Noise**

Taehyun Kim*, Kwang Soon Kim,
Sangwoo Ryu**, Iickho Song**** Regular Members

*한국방송공사 기술연구소
**한국과학기술원 전기 및 전자공학과
論文番號 : 95021-0130
接受日字 : 1995年 1月 30日

약의존성 잡음에서 몇가지 신호검파 방식들의 성능특성

正會員 金泰賢*, 金光淳**, 柳尙佑**, 宋翊鎬**

Performance Characteristics of Some Signal Detectors in Weakly Dependent Noise

Taehyun Kim*, Kwang Soon Kim**, Sangwoo Ryu**, Iickho Song** Regular Members

要 約

이 논문에서는, 약의존성 가산 잡음모형에서 이산시간 알려진 신호검파 문제를 생각하여, 이 잡음 모형에서 국소최적 검정통계량, 기억소자가 없는 검정통계량, 그리고 기억소자를 하나 갖는 검정통계량을 얻는다. 다음에, 이들 검정통계량에 바탕을 둔 여러 검파기의 성능특성을 견주어보고, 약의존성 잡음모형에서 기억소자를 하나 갖는 검파기의 성능이 거의 최적임을 보인다.

ABSTRACT

In this paper, we consider the discrete-time known signal detection problem under the presence of additive noise exhibiting weak dependence. We derive the locally optimum, memoryless, and one-memory detector test statistics under a weakly dependent noise model.

The performance characteristics of the one-memory detector are compared with those of the locally optimum and memoryless detectors. We observe that the one-memory detector can achieve almost optimum performance at the expense of only one memory unit under the weakly dependent noise model.

*한국방송공사 기술연구소

**한국과학기술원 전기 및 전자공학과

論文番號 : 95021-0130

接受日字 : 1995年 1月 30日

1. 머릿말

신호에 잡음이 섞여있을 때 신호를 검파하는 문제는 여러 참고 문헌에서 다루어지고 있다. 여러 신호 검파 문제 가운데에서 특히 약한 신호 (weak signal) 검파가 그 중요성 때문에 관심의 대상이 되고 있다. 약한 신호 검파 문제를 이진가설 검정문제로 봄으로써 편리한 수학적 틀을 얻을 수 있으며, 그 결과로 국소최적 (locally optimum) 검파기를 (1) 얻을 수 있다.

한편, 신호 검파 문제를 다룰 때 흔히 관측은 독립이라 가정한다. 그러나, 이산시간 신호검파 문제에서 표본들이 통계학적으로 독립이라는 가정은 맞지 않을 때가 많다. 이제까지 여러 연구에서 이 문제를 풀 수 있도록 몇가지 의존성 관측모형에 바탕을 둔 신호 검파 시스템이 다뤄진 바 있다 [2-4]. 특히, [2]에서는 잡음이 M 차 의존성이고 신호가 상수일 때 신호검파문제를 다루었으며, [3]에서는 잡음의 의존특성을 이동평균 (moving average) 모형으로 나타냈을 때 신호검파문제를 다루고 있다. 그리고, [4]에서는 비정규잡음이 이동평균모형으로 나타날 때 국소최적검파에 대해 다루었다.

이 논문에서는 신호검파 시스템에 기억소자를 쓸 수 있고, 잡음성분이 서로 약하게 의존하고 있을 때 신호검파문제를 다루어 보겠다. 특히 신호가 약할 때는 기억소자가 있는 국소최적검파기나 근사 국소최적검파기가 쓸모있음을 보이고자 한다. 일반화된 네이만-피어슨 (Neyman-Pearson) 정리를 [5] 따르면, 국소최적검파기는 원점에서 검파력함수의 기울기를 오경보확률이 같은 모든 검파기 가운데에서 가장 크게 한다고 알려져 있다. 이런 원리에 바탕을 두고 [6]에서는 적산성 잡음모형에서 알려진 신호와 확률신호가 함께 있는 복합신호 검파에 대해 다루었고, [7]에서는 가산성 잡음과 신호의 의존성 잡음이 있을 때 복합신호검파에 대해 다루었다.

이 논문에서는 먼저 약하게 의존하고 있는 잡음을 이동평균 계통으로 나타내는 모형을 제안하고 제안된 모형에서 기억소자가 있거나 없는 여러 검파기의 성능 특성에 대해 살펴 보고자 한다. 제안된 모형은 실제 잡음이 독립이 아닐 때 쓸모있으며, 기억소자가 있는 검파기는 그와 같은 잡음환경에서 실제 문제에 응용될 수 있을 것이다.

2. 여러가지 검정통계량

이 논문에서는 이산시간에서 약한 알려진 신호를 다루는데, 아래와 같이 귀무가설을 H_0 으로, 대립가설을 H_1 로 두자.

$$H_0 : X_i = W_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$H_1 : X_i = \theta S_i + W_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

여기서 X_i 는 관측값이고, W_i 는 잡음성분이다. 또, θ 는 신호세기를 나타내는 매개변수이며, 편의상 알려진 신호성분 s_i 는 모두 1로 두었다. 신호성분이 있고 없음을 따라 θ 는 0이거나 0보다 크므로, 검파문제는 n 관측값으로 만들어지는 관측벡터 $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 이 주어졌을 때 어떤 가설을 고르느냐 하는 것이다. 한편, 의존성 잡음성분 W_i 는 다음과 같이 서로 독립이고 같은 분포를 갖는 확률변수들의 이동평균모형으로 나타낸다고 가정한다.

$$W_i = e_i + \rho e_{i-1} u_{i-2}. \quad (1)$$

여기서, u_i 는 단위계단함수이고 (곧, $i < 0$ 이면 $u_i = 0$, $i \geq 0$ 이면 $u_i = 1$), e_i 는 연속인 도함수를 가지고 정칙조건을 (regularity condition) 만족시키는 짝수대칭 (even symmetric) 확률밀도함수 f_e 를 가지는 서로 독립이고 같은 분포를 갖는 확률변수들이다. 한편, (1)에서 ρ 를 의존매개변수라 부른다. 이 논문에서는 잡음성분이 약의존성이라 가정하고 있다. 곧 (1)에서 $|\rho|$ 의 값이 꽤 작다고 두겠다.

식 (1)의 모형을 따르는 관측값들로부터, 신호성분이 있는지를 결정할 수 있도록, 먼저 다음 식으로 국소최적 검정통계량을 얻는다.

$$T_{LO}(\underline{X}) = \frac{\frac{d}{d\theta} f_{\underline{X}|\theta}(\underline{X} | \theta) |_{\theta=0}}{f_{\underline{X}|0}(\underline{X} | 0)}. \quad (2)$$

여기서 $f_{\underline{X}|\theta}(\underline{X} | \theta)$ 는 θ 일 때 관측벡터 \underline{X} 의 조건부 확률밀도함수이다. 잡음성분이 서로 독립이 아닐 때에는, $f_{\underline{X}|\theta}(\underline{X} | \theta)$ 를 얻는 것은 일반적으로 어렵다. 그러나, (1)에서는 아래와 같이 이 확률밀도함수를 그런대로 쉽게 얻을 수 있다.

$$f_{\underline{X}|\theta}(\underline{X} | \theta) = f_e(X_1 - \theta) f_e(X_2 - \rho X_1 - (1 - \rho)\theta) \dots$$

$$f_c(\sum_{j=0}^{n-1} (-\rho)^j X_{n-j} - \frac{1 - (-\rho)^n}{1 + \rho} \theta).$$

따라서, (2)에서 다음을 얻을 수 있다.

$$T_{LO}(\underline{X}) = \sum_{m=0}^{n-1} g_{m,m+1}(\underline{X}). \quad (3)$$

여기서 비선형함수 $g_{m,k}(\underline{X})$ 는 $k \geq m+1$ 일 때 다음과 같이 정의된다.

$$g_{m,k}(\underline{X}) = -\frac{1 - (-\rho)^{m+1}}{1 + \rho} \frac{f'_c(\sum_{j=0}^m (-\rho)^j X_{k-j})}{f_c(\sum_{j=0}^m (-\rho)^j X_{k-j})}. \quad (4)$$

그러므로, 잡음의 상관성을 완전히 이용하려면 기억소자가 $(n-1)$ 개 필요하다. 이제, 기억소자를 하나까지만 쓸 수 있다고 하자. 먼저, 기억소자를 쓰지 않을 때를 생각해 보자. 식 (3)에서 $\rho^k, k=1, 2, \dots, n-1$,이 들어간 항을 무시하면 검정통계량은 다음과 같다.

$$T_0(\underline{X}) = \sum_{k=1}^n g_{0,k}(\underline{X}). \quad (5)$$

검정통계량이 $T_0(\underline{X})$ 인 검파기는 독립 잡음에서의 국소최적검파기인데 [1], 이것을 이 논문에서는 기억소자가 없는 검파기라 부르기로 하자.

다음으로, 기억소자를 하나 쓸 때를 생각해 보자. 식 (3)에서 $\rho^k, k=2, 3, \dots, n-1$,이 들어간 항을 무시하면 검정통계량은 다음과 같다.

$$T_1(\underline{X}) = g_{0,1}(\underline{X}) + \sum_{k=2}^n g_{1,k}(\underline{X}). \quad (6)$$

검정통계량이 $T_1(\underline{X})$ 인 검파기를 기억소자를 하나 갖는 검파기라 부른다.

3. 접근 성능

표본의 크기가 무한대일 때의 성능인 검파기의 접근 성능을 견주어 볼 때, 그 잣대로 접근상대효율이 널리 쓰인다 [8]. 검파기 D_B 에 대한 검파기 D_A 의 접근상대효율은 어떤 정칙조건아래에서 이 두 검파기의 효능비로 나타난다. 곧,

$$ARE_{A,B} = \frac{\xi_A}{\xi_B}.$$

여기서 검파기 D_i 의 효능 ξ_i 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\xi_i = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[\frac{d}{d\theta} E\{T_i(\underline{X}) | \theta\} |_{\theta=0}]^2}{nV\{T_i(\underline{X}) | \theta\} |_{\theta=0}}, \quad i = A, B. \quad (7)$$

식 (7)에서 T_i 는 검파기 D_i 의 검정통계량이고, $E\{T_i(\underline{X}) | \theta\}$ 와 $V\{T_i(\underline{X}) | \theta\}$ 는 각각 θ 일때 T_i 의 평균과 분산이다.

정리 1 :

약의존성 잡음모형 (1)에서 기억소자가 없는 검파기, 기억소자를 하나 갖는 검파기, 선형상관 (linear correlator : LC) 검파기, 그리고 부호상관 (sign correlator : SC) 검파기의 효능은 다음과 같다.

$$\xi(T_0) = \frac{I(f_c) + \rho^2 E\{e_i^2\} E\{g_0'''(e_i)\}}{1 + 2\rho + C_c \rho^2} + O(\rho^3),$$

$$\xi(T_1) = \frac{(1 - \rho)^2}{1 - 2\rho^2} I(f_c) + O(\rho^4),$$

$$\xi(T_{LC}) = \frac{1}{(1 + \rho)^2 E\{e_i^2\}},$$

그리고

$$\xi(T_{SC}) = \frac{4f_c^2(0) + 4\rho^2 f_c(0) f_c''(0) E\{e_i^2\}}{1 + 4\rho f_c(0) E\{|e_i|\}} + O(\rho^3).$$

여기서 $O(\rho^3)$ 은 $\lim_{\rho \rightarrow 0} |O(\rho^3)/\rho^3| < \infty$ 이고, $C_c = E\{e_i^2\} (E\{g_0(e_i) g_0''(e_i)\} + E\{(g_0'(e_i))^2\}) / I(f_c)$ 이며, $I(f_c) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_c'(x)/f_c(x)]^2 f_c(x) dx$ 는 피셔 정보이고 (Fisher's information), $g_0(X_k) = g_{0,k}(\underline{X})$ 이다.

정리 1의 증명은 [9]에 있다.

한편, $|\rho|$ 의 값이 작을 때, $O(\rho^3)$ 항은 무시할 수 있으므로 정리 1을 쓰면 검파기들의 접근 성능을 견주어 볼 수 있다.

보기 1.

이 보기에서는 기억소자가 없는 검파기, 기억소자를 하나 갖는 검파기, 부호상관검파기, 선형상관검파기의 접근 성능을 견주어 본다. 확률밀도함수 f_c 는 정규분포,

$$f_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

일반화된 정규분포일 때이다.

$$f_c(x) = \frac{K}{A(2K)\Gamma(\frac{1}{2K})} e^{-[\frac{x}{\sqrt{2K}}]^{2K}} \quad (8)$$

여기서, K 가 작을수록 이 확률밀도함수의 꼬리는 길어진다.

표 1에 점근상대효율값들이 나와있다. $|\rho|$ 의 값이 작을 때에는 기억소자를 하나 갖는 검파기의 점근 성능이 가장 좋음을 알 수 있다.

4. 유한표본성능

이제 표본의 크기가 유한할 때의 성능인 검파기의 유한 표본 크기 성능을 살펴보자. 유한 표본 크기 성능은 점근 성능보다 더 실제적인 측도임을 쉽게 알 수 있다.

보기 2.

확률밀도함수 f_c 가 다음과 같은 때를 생각해보자.

$$f_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

이 때, $n \rightarrow \infty$ 이면 다음과 같다는 것을 쉽게 보일 수 있다.

$$\frac{T_1(X)}{T_0(X)} = \frac{\frac{1}{n}T_1(X)}{\frac{1}{n}T_0(X)} \xrightarrow{L} (1 - \rho)^2$$

바꾸어 말하면, f_c 가 정규확률밀도함수일 때에는 3절에서 보인 것처럼 기억소자를 하나 갖는 검파기와 기억소자가 없는 검파기는 성능이 같을 뿐만 아니라 검정통계량도 사실상 같다.

보기 3.

이 보기에서는 확률밀도함수 f_c 가 다음과 같을 때 몇몇 검파기의 유한표본성능을 살펴 보자.

$$f_c(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \frac{1}{(1+x^2/3)^2}$$

표본 크기가 50 일때 몇몇 검파기의 검파확률을 신호 크기 θ 의 함수로 그림 1에 보였다. 이 그림에서 점들의 간격은 0.02 이며, 이 점들은 오경보확률이 10^{-3} 일 때 상대 오차가 1%가 되도록 100,000번의 몬테 카를로 실행을 통해 얻었다.

그림 1에서 D_0, D_1, D_{LO}, D_{LC} 와 D_{SC} 는 각각 기억소자가 없는 검파기, 기억소자를 하나 갖는 검파기, 국소 최적 검파기, 선형상관 검파기, 그리고 부호상관 검파기를 뜻한다. 그리고, $D_{P_j}, j=1,2$ 는 아래 잡음모형에서 설계된 [3] 검파기들을 뜻한다.

$$W_j = \rho e_{i-1} + e_i + \rho e_{i+1} \quad (9)$$

여기서, $D_{P_j}, j=1,2$ 의 검정통계량은 다음과 같다.

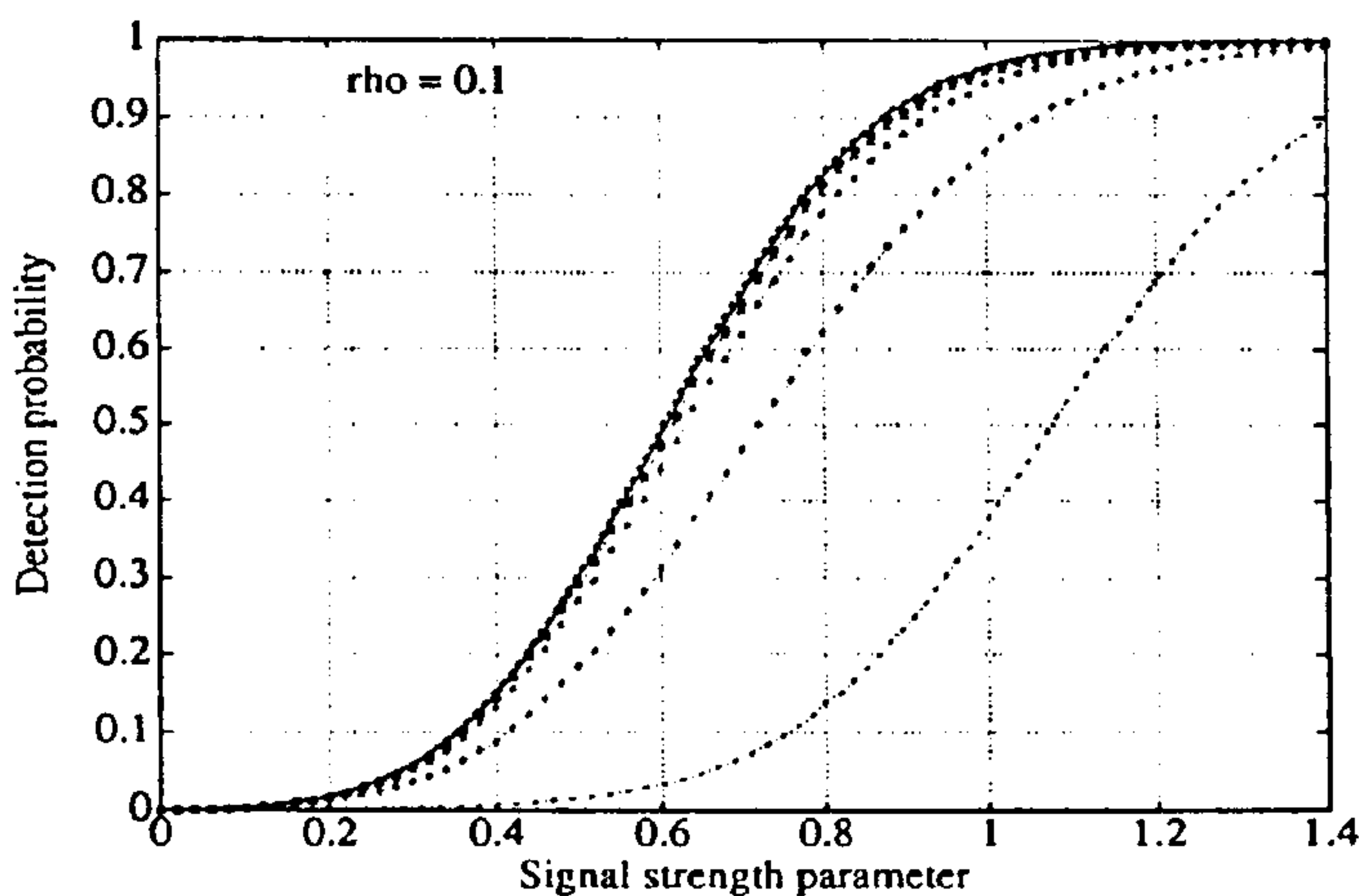


그림 1. (가): 여러 검파기의 검파확률. ---: D_{LO} , ----: D_1 , -o-o-: D_0 , -x-x-: D_{P_1} , -+--+ : D_{P_2} , -++-+ : D_{SC} ,: D_{LC} .

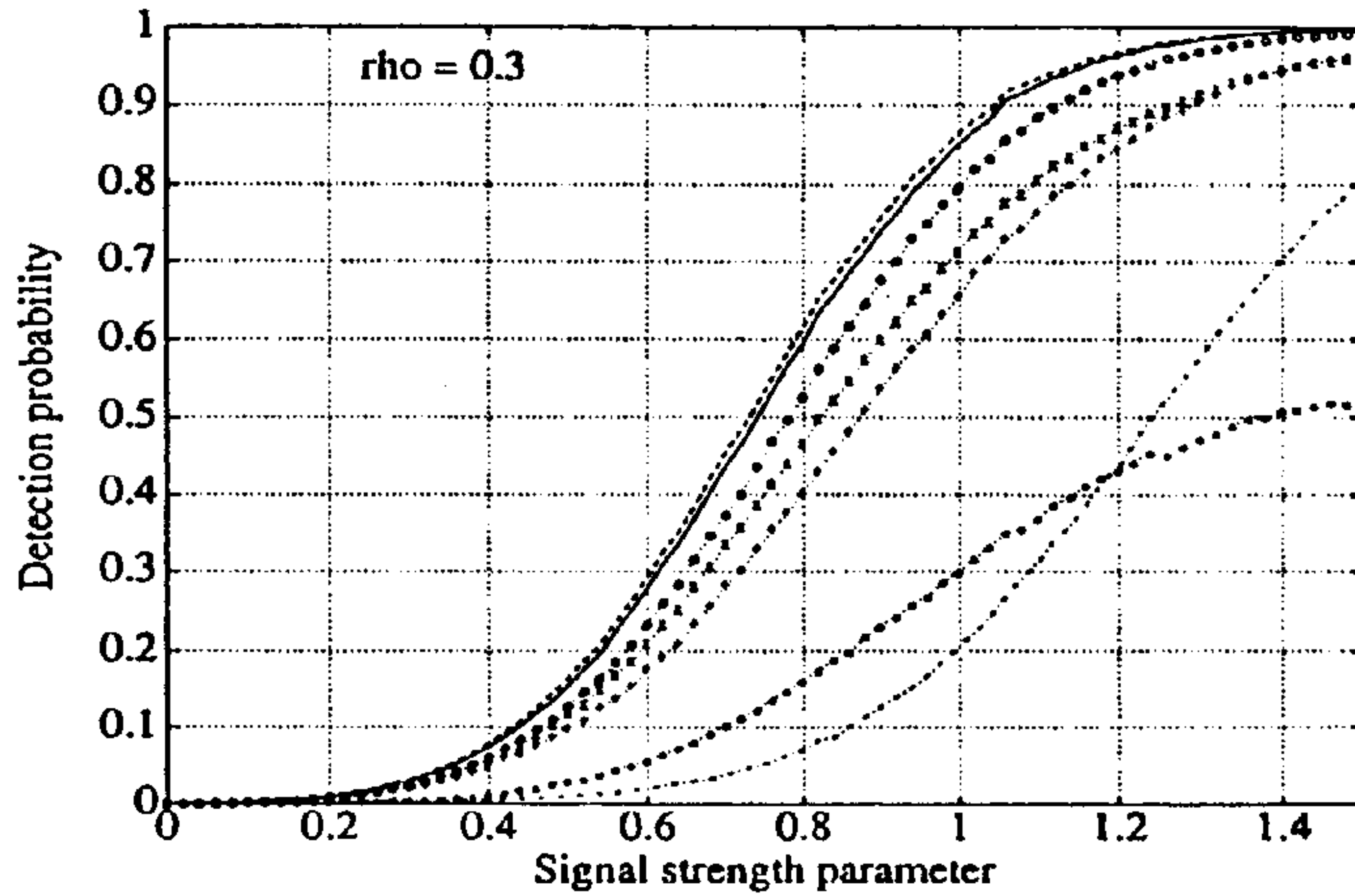


그림 1. (나): 여러 검파기의 검파확률. —: D_{LO} , ----: D_1 , -o-o-: D_0 , -x-x-: D_{P_1} , -*- -: D_{P_2} , -+-+ -: D_{SC} , -·-·-·: D_{LC} .

$$T_{P_j}(X) = \sum_{k=1}^n \left\{ g_0(X_k) - \frac{\rho_j}{1 + \rho_j} I(f_c) X_k \right\}.$$

을 것이다.

검파기 D_{P_2} 의 성능은 모형 (9)에서 분석된 바 있다 [3]. 그런데, 이 논문에서의 주 관심은 모형 (1)에서의 검파성능이므로, (9)와 견주어서 $\rho_{e_{j+1}}$ 항이 없음을 고려하면, (1)에서는 D_{P_1} 을 쓰는 것이 더 좋을 것이다. (그림 1을 살펴 보면 이는 더욱 명확해진다.)

그림 1에 잡음 모형 (1)에서 ρ 가 0.1과 0.3일 때 검파기들의 검파확률을 보였다. 일반적으로 그림 1에서 우리는 다음과 같은 세가지를 관찰할 수 있다. 첫째, D_1 의 검파확률은 D_{LO} 의 검파확률보다 조금 낮다. 기억소자 수를 보거나 구현의 복잡함을 볼 때, 이 차이는 그리 크지 않다고 말할 수 있다. 둘째로, 앞에서 간략히 설명했던대로 D_{P_1} 의 검파확률은 D_{P_2} 의 검파확률보다 높다. 셋째로, 잡음이 충격성이므로 D_{SC} 의 검파확률은 D_{LC} 의 검파확률보다 크다.

그림 1 (가)에서와 같이 $|\rho|$ 의 값이 작으면, 이 일반적인 관찰은 더욱 옳다. 한편 D_1 의 검파확률은 D_0 의 검파확률보다 높고 D_{LO} 의 검파확률과 비슷하다. 이와 같은 D_1 의 거의 최적의 성능이 기억소자 하나로 얻어졌다는 것은 눈여겨 볼 만하다. 위 모의 실험 결과를 종합하면 약의존성 잡음모형에서는 기억소자 하나 갖는 검파기가 다른 검파기들과 견주어서 좋은 성능 특성을 나타낸다고 할 수 있다. 이는 잡음의 분포가 바뀔 때에도 같

5. 맺음말

이 논문에서는 약의존성 잡음모형에서 알려진 신호 검파문제를 다루어 보았다. 약의존성 잡음모형을 제안하였고, 이 모형에서 국소최적검파기와 이를 근사한 검파기들의 검정통계량을 얻었다. 다음으로, 약의존성 잡음모형에서 기억소자 하나 갖는 검파기를 기억소자가 없는 검파기, 선형상관검파기, 부호상관검파기와 견주어 보았다.

여러 검파기의 성능을 좀 더 구체적으로 견주어 볼 수 있도록, 잡음이 정규분포, 일반화된 정규분포를 따를 때에 점근 성능과 유한표본성능을 살펴보았다. 그 결과 의존매개변수의 절대값이 작으면 기억소자 하나 갖는 검파기의 성능이 국소최적 검파기의 성능과 거의 비슷함을 볼 수 있었고, 국소최적 검파기가 아닌 다른 검파기의 성능보다 좋음을 알 수 있다.

참고문헌

1. S.A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*, New York : Springer-Verlag, 1988.

2. H.V. Poor and J.B. Thomas, "Memoryless discrete-time detection of a constant signal in m -dependent noise," *IEEE Tr. Inform. Theory*, vol. IT-25, pp.54-61, Jan. 1979.
3. H.V. Poor, "Signal detection in the presence of weakly dependent noise," *IEEE Tr. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp.735-744, Sep. 1982.
4. A.M. Maras, "Locally optimum detection in moving average non-Gaussian noise," *IEEE Tr. Commun.*, vol. COM-36, pp.907-912, Aug. 1988.
5. E.L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses*, New York: Wiley, 1986.

6. 임 태상, 김 상엽, 김 형명, 송 익호, 김 선용, 유 홍균, "복합신호 - 적산성 잡음모형에서 약한 신호 검파", 한국통신학회 논문지, 16권, 1125-1131쪽, 1991년 11월.
7. 송 익호, 김 상엽, 김 선용, 박 성일, "신호의존성 잡음모형과 복합신호 검파", 한국음향학회지, 12권, 19-26쪽, 1993년 7월.
8. M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, 4th Ed., New York: Oxford Univ. Press, 1979.
9. 김 태현, 약의존성 잡음 모형에서 알려진 신호 검파, 석사학위논문, 한국과학기술원 전기및 전자공학과, 1994년 2월.

金 泰 賢(Taehyun Kim)

정회원

1969년 12월 1일

1992년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 공학사
 1994년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사
 1994년 3월~현재: 한국방송공사 기술연구소 연구원
 *주관심 분야 : 통계학적 신호처리, 신호검파

金 光 淳(Kwang Soon Kim)

정회원

1972년 9월 20일

1994년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학사(최우등)
 1996년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사
 1996년 3월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정
 *주관심 분야 : 통계학적 신호처리, 이동 통신, 통신이론

柳 尙 佑(Sangwoo Ryu)

정회원

1972년 2월 24일

1994년 2월 : 연세대학교 전자공학과 공학사
 1994년 3월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정
 *주관심 분야 : 통계학적 신호처리, 배열 신호처리

宋 翊 鏞(Iickho Song)

정회원

1960년 2월 20일

1982년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학사 (준 최우등)
 1984년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학석사
 1985년 8월 : 펜실베니아 대학교 전기공학과 공학석사
 1987년 5월 : 펜실베니아 대학교 전기공학과 공학박사
 1987년 3월~1988년 2월 : 벨 통신연구소 연구원
 1988년 3월~1991년 8월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 조교수
 1991년 9월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 부교수
 1995년 2월~현재: 한국통신학회 논문지 편집위원
 1991년 11월 : 한국통신학회 학술상
 1993년 11월 : 한국음향학회 우수연구상
 *주관심 분야 : 통계학적 신호 처리, 신호검파, 스펙트럼 추정, 이동통신