약의존성 잡음에서 한 순위 검파기의 분석

Analysis of a Rank Detector in Weakly Dependent Noise

김 광 순, 윤 석 호, 송 익 호, 윤 형 식, 원 대 한

한국과학기술원 전기 및 전자공학과
전화: 042-869-3445 전송: 042-869-3410
전자우편: isong@Sejong.kaist.ac.kr

요 약

이 논문에서는, 약의존성을 나타내는 덧셈꼴 잡음환경에서의 순위 통계량을 바탕으로 하는 비모수 신호검파를 생각하였다. 약의존성 잡음모형에서 알려진 신호와 확률신호를 검파하는 국소최적순위검파기의 검정통계량을 유도하였으며, 점근상대효율을 써서 이들 검파기의 성능을 분석하였다.

1. 머리말

국소최적검파기는 약한신호를 검파하는데 알맞고, 효율적이기 때문에 신호검파이론과 응용분야에서 많은 관심을 끌어왔다. 국소최적검파기의 한 부류인 국소최적순위 (국최순) 검파기는 단순한 산술만을 필요로 하고, 잡음모형의 편차에 그리 민감하지 않으며, 비모수 성질을 가지고 있기 때문에 많이 연구되어 왔다 [1], [2].

신호검파에서 덧셈꼴 잡음 표본은 서로 독립적이라고 가정되어왔지만, 그런 가정이 실제적으로 맞지 않은 때가 많기 때문에 의존성 잡음 모형에서의 신호검파에 관한 연구가 필요하다. 여러 가지 잡음모형에서의 신호 검파 문제에 관한 연구의 보기는 참고문헌 [3], [4]에 나와있다.

이 논문에서는, 약의존성 잡음모형에서 알려진 신호와 확률신호를 검파하는 국최순검파기를 생각할 것이다. 약의존성 잡음은 서로 독립이고 같은 분포를 가지는 확률과정의 일차 이동평균으로서 모형화될 것이다. 국최순검파기의 검정통계량을 유도하고, 국최순 검파기의 점근성능을 분석할 것이다.

2. 관측모형

신호검파문제에서 귀무가설을 H_0, 대립가설을 H_1으로 쓰자. 이 때, 관측모형을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} H_0&: X_i = W_i, & i=1,2,\cdots,n, \\ H_1&: X_i = \theta s_i + W_i, & i=1,2,\cdots,n, \end{aligned} \qquad (1)$$

여기서 $\{X_i\}$는 관측값, $\{W_i\}$는 약의존성 잡음성분, θ는 신호세기매개변수, $\{s_i\}$는 신호성분이다. 약의존성 잡음 $\{W_i\}$는 일반적으로 볼테라전개로 모형화할 수 있다. 그러나 이 모형은 그 전개된 식에 포함되는 항이 무한히 많기 때문에 다룰수 없다. 따라서, 이 논문에서 약의존성 잡음 W_i, $i=1,2,\cdots,n$, 은 식 (2)와 같은 서로 독립이고 같은 분포를 가지는 확률변수의 이동평균으로 둔다.

$$W_i = e_i + \rho e_{i-1} u_{i-2}, \qquad (2)$$

여기서, e_i, $i=1,2,\cdots,n$는 서로 독립이고 분포가 같은 확률변수이다. 이들의 확률밀도함수 f_e는 유한하고 연속적인 미분계수를 갖는 우함수이고, 정규조건을 [1] 만족시킨다. (2)에서, ρ는 W_i의 상관계수를 결정하는 의존매개변수라 불리고, u_i는 $i \geq 0$일 때 1이고, $i < 0$일 때 0으로 정의되는 단위계단수열이다.

$$u_i = \begin{cases} 1, & i \geq 0 \text{ 일때}, \\ 0, & i < 0 \text{ 일때}, \end{cases} \qquad (3)$$

$\underline{X}$, $\underline{W}$, $\underline{e}$, $\underline{s}$를 각각 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $(W_1, W_2, \cdots,$

W_n), $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$을 나타내는 n 차원 벡터라고 하자. $f_{\underline{w}}(\underline{w}), f_{\underline{e}}(\underline{e}) = \prod_{i=1}^{n} f_e(e_i), f_{\underline{s}}(\underline{s})$ 는 각각 $\underline{W}, \underline{e}, \underline{s}$의 결합확률밀도함수이다. 그때,

$$f_{\underline{w}}(\underline{w}) = f_{\underline{e}}(\underline{y} - \theta \underline{c}). \quad (4)$$

여기서,

$Y_i = \sum_{k=0}^{i-1} (-\rho)^k X_{i-k}$, $c_i = \sum_{k=0}^{i-1} (-\rho)^k s_{i-k}$, $\underline{y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$, $\underline{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$. 이다.

3. 국소최적순위검파기

부호 벡터 $\underline{Z} = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$와 크기 순위 벡터 $\underline{Q} = (Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)$를 정의하자. 여기서 $Z_i = sgn(Y_i)$이고, Q_i는 집합 $|\underline{Y}| = \{|Y_1|, |Y_2|, \cdots, |Y_n|\}$에서 $|Y_i|$의 순위이다. $|\underline{Y}|_{[i]}$는 $|\underline{Y}|$에서 i째로 작은 원소를 나타낸다.

3.1 알려진 신호검파

신호 성분 s_i가 알려진 신호일 때, 일반성을 잃지않고 s_i=1이라고 둘 수 있다. 그 때, $c_i = \dfrac{1-(-\rho)^i}{1+\rho}$ 라는 것을 쉽게 알 수 있다. $(\underline{Q}, \underline{Z})$의 결합확률질량함수를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} p(\underline{q}, \underline{z}|\theta) &= \Pr(\underline{Q} = \underline{q}, \underline{Z} = \underline{z}|\theta) \\ &= \int_B f_{\underline{e}}(\underline{y} - \theta \underline{c}) d\underline{y}, \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $B = \{\underline{Y}|\underline{Q} = \underline{q}, \underline{Z} = \underline{z}\}$. 그때 국최순 검정통계량은 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$T_{LOR}(\underline{X}) = \frac{\left.\dfrac{dp(\underline{q}, \underline{z}|\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}}{p(\underline{q}, \underline{z}|0)}. \quad (6)$$

식, (4), (5)로부터, 쉽게 다음을 얻는다.

$$\left.\frac{dp(\underline{q}, \underline{z}|\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \left[\sum_{i=1}^{n} c_i z_i \Gamma_1(Q_i)\right] / (2^n n!) \quad (7)$$

$$p(\underline{q}, \underline{z}|0) = \int_B f_{\underline{e}}(\underline{Y}) d\underline{Y} = 1/(2^n n!), \quad (8)$$

여기서 $g_{LO}(x) = -f'_e(x)/f_e(x)$, $\Gamma_1(i) = E\{g_{LO}(|\underline{Y}|_{[i]})|\theta = 0\}$. 곧, 국최순 검정 통계량은

$$T_{LOR}(\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i \Gamma_1(Q_i). \quad (9)$$

3.2 확률신호검파

이제, 확률신호를 검파하는 국최순 검파기를 생각해본다. 확률신호성분 $\{s_i\}$가 평균이 0이고, 공분산이 $r_s(i, j)$인 확률과정이라고 하자. 이때 $(\underline{Q}, \underline{Z})$의 결합확률질량함수는,

$$\begin{aligned} p(\underline{q}, \underline{z}|\theta) &= \Pr(\underline{Q} = \underline{q}, \underline{Z} = \underline{z}|\theta) \\ &= \int_B \int_{R^n} f_{\underline{e}}(\underline{Y} - \theta \underline{c}) f_{\underline{s}}(\underline{s}) d\underline{s} d\underline{Y}. \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, R^n은 n차원 실수의 전체집합이다. 이제, 확률신호 국최순 검정통계량은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$T_{LOR}(\underline{X}) = \frac{\left.\dfrac{d^2 p(\underline{q}, \underline{z}|\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}}{p(\underline{q}, \underline{z}|0)}. \quad (11)$$

식 (4)와 (10)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d^2 p(\underline{q}, \underline{z}|\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} \\ &= \Big[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} E_{\underline{s}}\{c_i c_j\} z_i z_j \Gamma_2(Q_i, Q_j) + \sum_{i=1}^{n} E_{\underline{s}}\{ c_i^2\} D(Q_i)\Big] / (2^n n!) \end{aligned} \quad (12)$$

$$p(\underline{q}, \underline{z}|0) = \int_B \int_{R^n} f_{\underline{e}}(\underline{Y}) f_{\underline{s}}(\underline{s}) d\underline{s} d\underline{Y} = 1/(2^n n!), \quad (13)$$

여기서, $h_{LO}(x) = f''_e(x)/f_e(x)$, $E_{\underline{s}}\{\cdot\}$는 $\underline{s}$에 대한 평균, $\Gamma_2(i, j) = E\{g_{LO}(|\underline{Y}|_{[i]}) g_{LO}(|\underline{Y}|_{[j]})|\theta = 0\}$, $D(i) = E\{h_{LO}(|\underline{Y}|_{[i]})|\theta = 0\}$. 따라서 국최순 검정통계량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_{LOR}(\underline{Y}) = &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} E_{\underline{s}}\{c_i c_j\} z_i z_j \Gamma_2(Q_i, Q_j) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} E_{\underline{s}}\{c_i^2\} D(Q_i). \end{aligned} \quad (14)$$

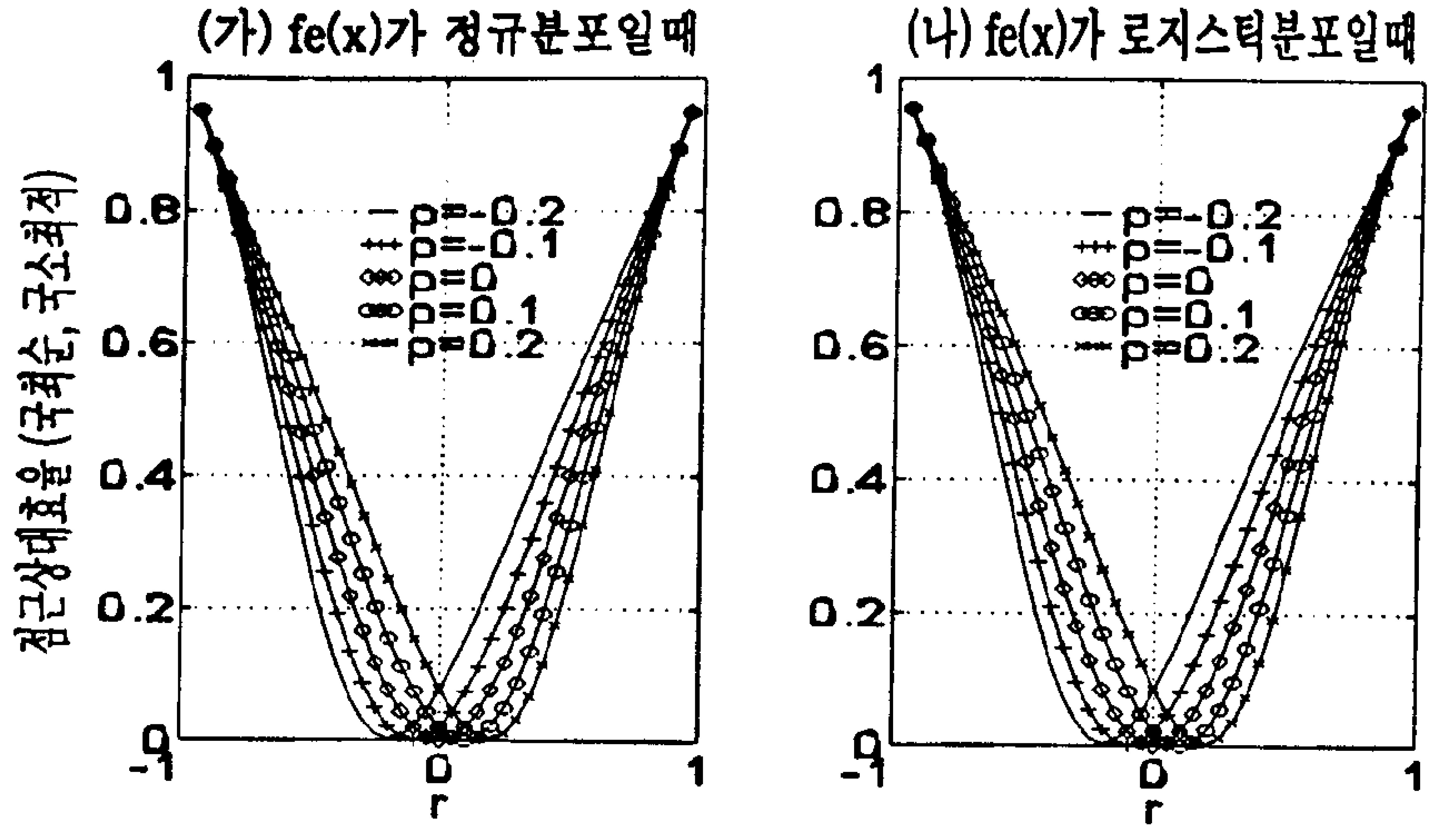

그림 1. 의존매개변수 ρ와 점근상대효율 (국최순, 국소최적): (가) ρ_i가 정규확률변수일때 (나) ρ_i가 로지스틱확률변수일때

4. 성능분석

이 절에서, 약의존성 잡음모형아래에서 국최순 검파기의 성능특성을 분석한다. 먼저, 알려진신호일때를 생각한다.

정리 1 검정통계량이 (9)와 같은 알려진신호 국최순 검파기의 효능은 $\xi_{LOR} = \dfrac{I_1(f_e)}{(1+\rho)^2}$ 이다.

정리 2 알려진 신호 국소최적 검파기의 효능은 $\xi_{LO} = \dfrac{I_1(f_e)}{(1+\rho)^2}$ 이다.

정리 1, 2의 증명은 [6]에 나타나 있다. 곧, 정리 1, 2로부터 약의존성 잡음모형에서 점근상대효율 $ARE_{LOR,LO}$는 덧셈꼴 흰빛 정규 잡음 모형에서와 마찬가지로 1이라는 것을 쉽게 알 수 있다.

이제, 확률신호인 때를 생각해본다. $\langle E_s^2(\underline{c},\underline{c})\rangle_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_s^2\{c_i c_j\}$, $\langle E_s^2(\underline{c}^2)\rangle_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_s^2\{c_i^2\}$, $\langle E_s(\underline{c}^2)\rangle_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_s\{c_i^2\}$, $I_1(f) = \int\left(\frac{f'(y)}{f(y)}\right)^2 f(y)dy$, $I_2(f) = \int\left(\frac{f''(y)}{f(y)}\right)^2 f(y)dy$. 라고 정의하자. n이 무한히 클 때, 이 정의식들에서 아래첨자 n을 뺄 것이다. 이때, 다음과 같은 정리가 성립한다.

정리 3 확률신호 국최순 검파기의 효능은 다음과 같다.

$$\xi_{LOR} = 2I_1^2(f_e)[\langle E_s^2(\underline{c},\underline{c})\rangle - \langle E_s^2(\underline{c}^2)\rangle] + I_2(f_e)[\langle E_s^2(\underline{c}^2)\rangle - \langle E_s(\underline{c}^2)\rangle^2]. \quad (15)$$

정리 3의 증명도 [6]에 나타나 있다. 약의존성잡음모형에서 확률신호 국소최적검파기의 효능이 다음과 같기 때문에

$$\xi_{LO} = 2I_1^2(f_e)[\langle E_s^2(\underline{c},\underline{c})\rangle - \langle E_s^2(\underline{c}^2)\rangle] + I_2(f_e)\langle E_s^2(\underline{c}^2)\rangle \quad (16)$$

(15)로부터 $\langle E_s(\underline{c}^2)\rangle^2 \ll \langle E_s^2(\underline{c}^2)\rangle$이면 국최순 검파기의 점근성능이 국소최적검파기의 점근성능과 꽤 가깝다는 것을 쉽게 알 수 있다. 여기서, $\langle E_s(\underline{c}^2)\rangle^2 \ll \langle E_s^2(\underline{c}^2)\rangle$라는 조건은 신호세기가 시간적으로 균등하지 않고, 신호의 상관특성이 잡음의

상관특성과는 꽤 다르다는 것을 뜻한다.
보기를 들어, $r_s(i,j)=r^{|i-j|}, 0<|r|<1$일때를 생각해 보자. 이때, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다 .

$$\langle E_s^2(\underline{c},\underline{c})\rangle = \frac{(1-\rho r)K_1(\rho,r)}{(1+\rho r)^3(1-\rho^2)^3(1-r^2)}, \quad (17)$$

$$\langle E_s^2(\underline{c}^2)\rangle = \frac{(1-\rho r)^2}{(1-\rho^2)^2(1+\rho r)^2}, \quad (18)$$

$$\langle E_s(\underline{c}^2)\rangle = \frac{1-\rho r}{(1-\rho^2)(1+\rho r)}, \quad (19)$$

$$K_1(\rho,r) = (1+\rho^2 r^2)(1-r^2)(1-\rho^2) + 2(r-\rho)^2(1+\rho r)^2. \quad (20)$$

의존매개변수 ρ의 값이 바뀔 때 $ARE_{LOR,LO}$곡선이 그림 1에 나타나 있다. 이 그림에서 신호의 공분산 함수가 잡음의 공분산과 다를 때 국최순검파기가 쓸모있다는 것을 쉽게 알 수 있다. 보기를 들어, $\rho=-0.2$일 때, $ARE_{LOR,LO}$의 값은 $r=-0.2$주위에서 거의 영이다. 그리고 $|r-\rho|$가 증가함에 따라 점점 커진다.

5. 맺음말

이 논문에서는, 약의존성 잡음 모형에서 알려진신호와 확률신호의 국최순 검파를 생각했다. 약의존성 잡음에서 국최순 검파기의 검정 통계량을 유도하였고, 점근성능을 분석한 뒤, 국소최적검파기와 점근상대효율을 견주어 보았다.
국최순 검파기의 점근성능은 알려진신호일 때 국소최적검파기와 같았다. 확률신호일때 신호세기가 시간적으로 균등하지 않고, 신호의 상관특성이 잡음의 상관특성과 다를 때, 국최순 검파기는 얼개가 단순하지만, 국소최적검파기와 비슷한 성능을 보였다.

고마움의 글

이 논문은 한국과학재단이 지원한 1998년 핵심전문연구 981-0916-097-2 로 이루어진 연구 결과의 하나이며, 이에 그 고마운 뜻을 적습니다.

참고문헌

[1] S.A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise,* New York: Springer-Verlag, 1987
[2] 송익호, 한영옥, 엄태상, 오택상, 유홍균 "순위 통계량으로 확률 신호를 검파하는 방법: 세2부. 두 표본을 쓸 때", 한국통신학회 논문지, 16권, 5호, pp. 445-450, 1991년 5월.
[3] H.V. Poor and J.B. Thomas, "Memoryless discrete-time detection of a constant signal in m-dependent noise," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol IT-23, pp. 54-61, January 1979.
[4] 송익호, 김상엽, 김선용, 손재철, "비가산성 잡음에서 순위통계량을 이용한 신호검파: 신호의존성 잡음과 확률 신호 검파", 한국통신학회 논문지, 15권, 11호, pp. 955-961, 1990년 11월.
[5] M.B. Priestley, *Spectral Analysis of Time Series,* London: Academic, 1981.
[6] 김광순, 윤석호, 송익호, 윤형식, 원대한, "약의존성 잡음에서 순위통계량을 쓰는 신호 검파 방식과 그 성능", 한국통신학회 논문지, (심사 받고 있음).