

퍼진 신호 모형에서 신호도착방향에 대한 최대우도 방법

이 용 업*, 이 주 식+, 김 광 순+, 이 성 로°, 송 익 호+

*삼성전자 멀티미디어 연구소 영상통신그룹

+한국과학기술원 전기 및 전자공학과

°목포대학교 전자공학과

ML-Based Techniques for Direction of Arrival under a Distributed Source Model

Yong Up Lee*, Jooshik Lee+, Kwang Soon Kim+, Seong Ro Lee°, and Ickho Song+

*Visual Comm. Group, Multimedia R/D

Samsung Electronics Co., Ltd.

+Department of Electrical Engineering

Korea Advanced Institute of Science and Technology (KAIST)

°Department of Electrical Engineering, Mokpo Univ.

초 록

신호도착방향을 추정할 때, 신호의 방향은 거의 점으로 가정된다. 그러나, 실제환경에서 몇 가지 까닭으로 신호의 방향이 퍼져 나타나면 점신호 모형을 바탕으로 한 신호도착방향 추정방법은 알맞지 않을 것이다. 이 논문에서는, 신호원이 퍼져 있을 때 신호도착방향 추정을 생각한다. 매개변수 모형을 제안하고, 이 모형에서 조건 최대우도와 비조건 최대우도를 바탕으로 한 추정방법을 썼을 때 통계학적 특성을 얻는다.

1. 머리말

신호도착방향 추정방법들은 배열 출력벡터의 공분산 행렬 고유구조 분해를 바탕으로 하고 있다. 우리가 잘 알고 있는 다중신호분류방법의 (MUSIC) 여러 가지 특성이 이제까지 많이 다루어졌다 [1]-[7]. 그 밖의 추정방법으로는 공분산 행렬의 최대우도 추정 방법이 있다 [8].

위에서 말한 신호도착방향 추정 방법들은 신호들이 점이라는 가정을 바탕으로 하고 있다. 실제 환경에서, 한 배열 안테나에서 받은 신호들은 점원으로 생각할 수 있는 직접경로신호 뿐만 아니라, 직접경로 신호가 위상 지연된 신호, 크기가 가중된 신호들을 갖는 퍼진 신호들을 포함한다. 이때, 관측된 신호들은 연속적인 방향으로부터 나온 평면파들이 겹쳐진 것으로 생각할 수 있다. 그러한 신호원을 퍼진 신호원이라고 한다 [7][9].

신호원의 방향이 퍼져서 나타날 때, 배열 출력은 일정한 수의 조종벡터의 가중합이 아니다. 더욱이, 점신호원에 대한 신호도착방향 추정 방법을 퍼진 신호원에서 쓸 때, 추정을 잘 할 수 있다는 보장이 없다.

2. 매개변수 신호원 모형

M 평면파 신호원들이 각각 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ 의 방향으로 L 선형감지기 배열에 입사한다고 생각하자. 이때, 배열 안테나의 출력값을

$$y(t) = \sum_{i=1}^M a(\theta_i)x_i(t) + n(t) \quad (1)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 여기서, $y(t) \in C^{L \times 1}$ 는 배열 출력벡터이고, $x_i(t)$ 는 i제 점신호원, $a(\theta) \in C^{L \times 1}$ 는 조종벡터이며, θ_i 는 i제 점신호원의 신호도착방향을 나타낸다. 평균이 0인 백색 복소정규잡음벡터 $n(t) \in C^{L \times 1}$ 은 공분산 행렬이 $E[n(t)n^H(s)] = \sigma^2 \delta_{ts}$ 이고 $E[n(t)n^T(s)] = 0$ 이며 정상이라고 가정한다. 여기서, $C^{L \times 1}$ 은 $L \times 1$ 복소벡터들의 공간이다.

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M]^T, A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_M)], x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$$

라고 쓸 수 있으며, 벡터 $x(t)$ 는 평균이 0이고 정상이며 $E[x(t)x^H(s)] = R_x$ 이고 $E[x(t)x^T(s)] = 0$ 인 복소정규 확률벡터이다.

이제, 점신호원을 일반화하여 퍼진 신호원을 생각하자. 점신호원 $\hat{x}_p(\theta, t)$ 는 θ 의 ($0 \leq \theta < 2\pi$) 주기 함수이기 때문에,

$$\hat{x}_p(\theta, t) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} x'_o(t) \delta(\theta - 2\pi m - \theta_o) \quad \text{으로 나타낼 수 있다. 선형감지기 배열로 전파하는 평면파는}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x_o(t) \cos m(\theta - \theta_o)$$

타낼 수 있다. 선형감지기 배열로 전파하는 평면파는

$$x_p(\theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} x_o(t) e^{jm(\theta - \theta_o)} = \sum_{m=0}^{\infty} x_o(t) p_m(\theta_o) e^{jmb}$$

며, 함수 $p_m(\theta_o) = e^{-jmb}$ 를 일반화하면, 퍼진 신호원은

$$x_d(\theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} x_o(t) c_m(\phi) e^{jmb}$$

로 나타낼 수 있다. 이러한 신호원을 매개변수 퍼진 신호원이라 부른다.

이때, 매개변수 퍼진 신호원들을 생각하면, 배열의 출력은

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \frac{x_i(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\phi_i) e^{jm\theta} d\theta + n(t) \quad (3)$$

$$= \sum_{i=1}^M x_i(t) b(\phi_i) + n(t)$$

이고, 여기서 $\phi_i = (\theta_i, \rho_i)$ 는 중심방향인 신호도착 방향 θ_i 와 퍼진 정도를 나타내는 퍼짐변수 ρ_i 로 이루어진 매개변수들의 집합이며, $c_m(\phi)$ 는 이 매개변수들의 가중함수이다. 그리고,

$$b(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\phi) e^{jm\theta} d\theta \quad (4)$$

는 매개변수 모형에서 조종벡터를 나타낸다. 매개변수 벡터를 $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M]^T$ 로 나타내고 $B(\phi) = [b(\phi_1), b(\phi_2), \dots, b(\phi_M)]$ 로 쓸 때, (3)은

$$y(t) = B(\phi)x(t) + n(t) \quad (5)$$

로 쓸 수 있고, $y(t)$ 의 공분산 행렬은

$$R_o = B(\phi)R_x B^H(\phi) + \sigma^2 I \quad (6)$$

로 쓸 수 있다.

3. 최대우도를 바탕으로 한 신호도착방향 추정

매개변수 모형에서, 조건 최대우도와 비조건 최대우도 [10] 방법을 생각해 보자.

$S_p = B(\phi)[B(\phi)^H B(\phi)]^{-1} B(\phi)^H$ 를 $B(\phi)$ 의 열벡터들로 이루어지는 공간으로의 투사 연산행렬, $N_p = 1 - S_p$ 를 S_p 의 직교 연산행렬, $x(\theta, t) = [x_1(\theta, t), x_2(\theta, t), \dots, x_M(\theta, t)]^T$ 를 매개변수 신호원 벡터, $\hat{R}_o = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) y^H(t)$ 를 $y(t)$ 의 표본 공분산 행렬이라고 하자.

3.1 조건 최대우도 방법을 쓴 신호도착방향 추정

먼저, 확률과정 $x(t)$ 를 조건 매개변수로 놓는다. 그러면, $x(\theta, t)$ 는 $x(t)$ 의 함수이기 때문에 $\{y(t)\}_{t=1}^N$ 의 분포는 $\{x(\theta, t)\}_{t=1}^N$ 을 조건으로 한다고 볼 수 있다. 관측 자료의 조건 대수우도 함수는 (3)에서

$$\ln L(Y|x(t)) = -N \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^N [y(t) - B(\phi)x(t)]^H [y(t) - B(\phi)x(t)] \quad (7)$$

로 쓸 수 있고, $Y = [y(1), y(2), \dots, y(N)] \in C^{L \times M}$ 은 관측행렬이다. (7)로부터 조건 최대우도 비용함수

$$V_c(\phi) = \text{tr}[N_p \hat{R}_o] \quad (8)$$

을 얻을 수 있다. 따라서, ϕ 의 추정, $\hat{\phi}$ 은

$$\hat{\phi} = \arg \max_{\phi} \text{tr}[N_p \hat{R}_o] \quad (9)$$

로 쓸 수 있다.

3.2 비조건 최대우도 방법을 쓴 신호도착방향 추정

비조건 최대우도 방법에서는 조건 최대우도 방법에서와는 달리 $\{x(\theta, t)\}_{t=1}^N$ 이 $\{y(t)\}_{t=1}^N$ 의 조건이 되지 않는다. 배열의 출력 $y(t)$ 는 공분산 행렬

R_o 을 갖고 평균이 0인 복소정규확률 벡터이다. 식 (3)에서 관측 행렬 Y 의 비조건 대수우도 함수는

$$\ln L(Y) = -N \ln \det[R_o] - N \text{tr}[R_o^{-1} \hat{R}_o] \quad (10)$$

로 쓸 수 있다. 이제 (10)이 어떤 ϕ , $x(t)$, σ^2 에 대하여 가장 큰 값을 나타내는지 알아본다. 먼저, ϕ 와 σ^2 가 주어졌을 때 (10)이 가장 크거나 ϕ 와 $x(t)$ 가 주어졌을 때 (10)이 가장 크려면

$$\text{tr}[(R_o^{-1} - R_o^{-1} \hat{R}_o R_o^{-1}) R_o] = 0 \quad (11)$$

을 만족시켜야 한다. 여기서,

$$R_o = \left[\frac{\partial}{\partial x(t)} R_o, \frac{\partial}{\partial \sigma} R_o \right]^T \text{이다. [11]의 결과와 (1)}$$

1)에서, 비조건 최대우도 비용함수

$$V_u(\phi) = \ln \det[S_p \hat{R}_o S_p + \frac{1}{L-M} \text{tr}(N_p \hat{R}_o N_p)] \quad (12)$$

을 얻을 수 있다. 따라서, ϕ 의 추정, $\hat{\phi}$ 은

$$\hat{\phi} = \arg \min_{\phi} \ln \det[S_p \hat{R}_o S_p + \frac{1}{L-M} \text{tr}(N_p \hat{R}_o N_p)] \quad (13)$$

로 쓸 수 있다.

4. 통계학적 특성과 수치결과

이제, 매개변수 신호원 모형에서 최대우도방법을 써서 얻은 $(\hat{\theta}_i, \hat{\rho}_i)$ 의 추정값들의 점근적인 통계학적 특성을 살펴본다. 신호도착방향 매개변수 벡터 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M]^T$ 와 퍼짐변수 벡터 $\rho = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M]^T$ 를 정의하면 $B(\phi)$ 는 $B(\theta, \rho)$ 로 다시 쓸 수 있다. $\hat{\theta}$ 와 $\hat{\rho}$ 는 각각 퍼짐변수 벡터 ρ 와 신호도착방향 매개변수 벡터 θ 의 추정값들을 나타낸다. 식을 간단하게 쓰기 위해 다음과 같이 정의한다.

$$h_{\theta\theta} = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} B^H(\theta, \rho) \right] N_p \left[\frac{\partial}{\partial \theta} B(\theta, \rho) \right]^T, \quad (14)$$

$$h_{\theta\rho} = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} B^H(\theta, \rho) \right] N_p \left[\frac{\partial}{\partial \rho} B(\theta, \rho) \right]^T, \quad (15)$$

$$h_{\rho\rho} = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} B^H(\theta, \rho) \right] N_p \left[\frac{\partial}{\partial \rho} B(\theta, \rho) \right]^T, \quad (16)$$

$$h_{\rho\theta} = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} B^H(\theta, \rho) \right] N_p \left[\frac{\partial}{\partial \theta} B(\theta, \rho) \right]^T, \quad (17)$$

$$[A \odot B]_{ij} = [A]_{ij} [B]_{ij}. \quad (18)$$

4.1 조건 최대우도 방법

먼저, $(\hat{\theta}, \hat{\rho})$ 가 (θ, ρ) 와 거의 같다고 하면, 추정오차 벡터는,

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} - \theta \\ \hat{\rho} - \rho \end{bmatrix} \approx -H_c^{-1}(\theta, \rho) V_c'(\theta, \rho) \quad (19)$$

이 된다. 여기서,

$$V_c'(\theta, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} V_c(\theta, \rho) \\ \frac{\partial}{\partial \rho} V_c(\theta, \rho) \end{bmatrix} \quad (20)$$

이고

$$H_c(\theta, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} V_c(\theta, \rho) \right)^T & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} V_c(\theta, \rho) \right)^T \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} V_c(\theta, \rho) \right)^T & \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} V_c(\theta, \rho) \right)^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

이다. 식 (19)와 [1][2]의 결과를 써서, 추정오차 벡터는 공분산 행렬이

$$C_c = \frac{\sigma}{2N} \begin{bmatrix} \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot x(t) W_c x(t)^T) & \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot x(t) W_c x(t)^T) \\ \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot x(t) W_c x(t)^T) & \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot x(t) W_c x(t)^T) \end{bmatrix} \quad (22)$$

이고, 평균이 0인 정규확률벡터이다. 여기서,

$$W_c = x(t)^{-1} + \sigma x(t)^{-1} (B^H(\theta, \rho) B(\theta, \rho))^{-1} x(t)^{-1} \text{이다.}$$

또한, 추정오차벡터 분산의 크래머-라오 한계는 (CRB) (7)과 [2]의 결과를 확장하면

$$CRB_c = \frac{\sigma}{2N} \begin{bmatrix} \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot x(t)^T) & \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot x(t)^T) \\ \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot x(t)^T) & \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot x(t)^T) \end{bmatrix} \quad (23)$$

이 된다.

4.2 비조건 최대우도 방법

조건 최대우도 방법의 해석에서와 같이, $(\hat{\theta}, \hat{\rho})$ 가 (θ, ρ) 와 거의 같다고 두면, [1][8]의 결과로부터, 추정오차 벡터는 공분산 행렬이

$$C_u = \frac{\sigma}{2N} \begin{bmatrix} \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot W_u^T) & \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot W_u^T) \\ \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot W_u^T) & \text{Re}(h_{\theta, \rho} \odot W_u^T) \end{bmatrix}^{-1} \quad (24)$$

이고, 평균이 0인 정규확률벡터이다. 여기서,

$W_u = x(t) B^H(\theta, \rho) R_o^{-1} B(\theta, \rho) x(t)$ 이다. 이때, [8]의 결과를 확장하면 신호도착방향 추정오차벡터 분산의 점근적인 크래머-라오 한계는 $CRB_u = C_u$ 임을 쉽게 보일 수 있다.

4.3 수치결과

균일 선형 배열의 감지기 L은 5, 신호원 수 M은 2, 표본수 N은 100이라고 두고, 매개변수 모형으로부터 나온 신호원들은 서로 상관관계가 없다고 가정한다.

보기 1 : 이 보기에서는 신호대잡음비가 10, 20 dB일 때, CRB_c 와 신호도착방향 및 퍼짐변수의 추정오차들의 분산을 견주어 본다. 먼저, $\rho_1=0.99$, $\theta_1 = \frac{3\pi}{18}$, $\rho_2=0.95$ 이고, θ_2 가 바뀔 때 (22)와 (23)을 그림 1에 나타냈다. 한편, 그림 2는 $\rho_1=0.99$, $\theta_1 = \frac{3\pi}{18}$, $\theta_2 = \frac{4\pi}{18}$ 이고, ρ_2 가 바뀔 때를 나타낸다. 그림 1과 그림 2로부터, 두 신호도착방향의 차이가 많이 다를수록, 신호도착방향 추정오차의 분산과 CRB_c 가 서로 가까워지고, 두 퍼짐변수가 서로 다를수록, 퍼짐변수의 분산과 CRB_c 가 서로 가까워진다는 것을 알 수 있다. 또한, 신호도착방향 추정오차의 분산과 CRB_c 가 퍼짐변수 오차의 분산과 CRB_c 보다 더 큰 값을 보이고 있는데, 이것은 신호도착방향의 구분이 퍼짐변수의 구분보다 좋지 않음을 말해주는 것이다.

보기 2 : 이 보기에서는 신호대잡음비가 0, 10, 20dB 일 때, 신호도착방향과 퍼짐변수의 추정오차의 CRB_u (24)를 얻었다. 신호도착방향 추정오차들의 CRB_u 는 $\rho_1=0.99$,

$\theta_1 = \frac{3\pi}{18}$, $\rho_2=0.95$ 이고, θ_2 가 바뀔 때를 그림 3에 나타냈다. 한편, 그림 4는 $\rho_1=0.99$, $\theta_1 = \frac{3\pi}{18}$, $\theta_2 = \frac{4\pi}{18}$ 이고, ρ_2 가 바뀔 때를 나타낸다. 그림 3과 4에서, 신호도착방향 추정오차의 CRB_u 와 퍼짐변수 오차의 CRB_u 가 두 신호도착방향의 차이가 많이 다르고 두 매개변수가 서로 다를수록 각각 작아진다는 것을 알 수 있다. 또한, 그림 3에서 비조건 최대우도 방법을 써서 얻은 신호도착방향 추정오차의 CRB_u 가 그림 1에서 조건 최대우도 방법을 써서 얻은 신호도착방향 추정오차의 CRB_c 보다 더 크다는 것을 알 수 있다.

5. 결론

신호원들이 퍼져 있을 때, 퍼짐변수를 모르기 때문에 조건 최대우도나 비조건 최대우도 방법을 신호도착방향 추정에 써야 하는데, 이런 경우에는 표준 조건 최대우도나 표준 비조건 최대우도 방법이 신호도착방향을 정확히 추정하지 못한다. 이러한 문제는 퍼진 신호원 모형을 쓰거나 점신호원 모형에 대한 신호도착방향 추정 방법들을 바꾸어서 해결할 수 있었다. 또한, 매개변수 모형의 특성을 나타내는데 중요한 신호도착방향과 퍼짐변수 추정오차들의 여러 가지 통계학적 특성을 얻었다.

감사의 글

이 연구는 정보통신부가 지원한 대학기초연구 지원 사업으로 이루어진 결과의 하나이며, 이에 그 고마운 뜻을 적습니다.

참고문헌

- [1] M. Kaveh and A.J. Barabell, "The statistical performance of the MUSIC and minimum-norm algorithms in resolving plane waves," *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-34, pp. 331-341, April 1986.
- [2] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood and Cramer-Rao bound," *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-37, pp. 720-740, May 1989.
- [3] J. Choi and I. Song, "Asymptotic distribution of the MUSIC null-spectrum", *IEEE Tr. Signal Process.*, vol. SP-41, pp. 985-988, Feb. 1993.
- [4] J. Choi, I. Song, S. Kim, S.Y. Kim, and H.M. Kim, "A statistical analysis of MUSIC null-spectrum via decomposition of estimation error", *Signal Process.*, vol. 34, pp. 179-192, Nov. 1993.
- [5] J. Choi, I. Song, S. Kim, and Y.K. Jhee, "A generalized null-spectrum for direction of

f arrival estimation," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-42, pp. 462-466, February 1994.

- [6] S.R. Lee, I. Song, Y.U. Lee, T. Chang, and H.M. Kim, "Estimation of two-dimensional DOA under a distributed source model and some simulation results", *IEICE Tr. Fundamentals*, vol. E79A, pp. 1475-1485, Sep. 1996.
- [7] Y.U. Lee, J. Choi, I. Song, and S.R. Lee, "Distributed signal source modeling and direction of arrival estimation techniques for distributed signal sources", *IEEE Tr. Signal Process.*, vol. SP-45, pp. 960-969, Apr. 1997.
- [8] P. Stoica and A. Nehorai, "Performance study of conditional and unconditional direction of arrival estimation," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-38, pp. 1783-1795, October 1990.
- [9] S. Valaee, B. Champagne, and P. Kabal, "Parametric localization of distributed sources," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-43, pp. 2144-2153, September 1995.
- [10] D. Storer and A. Nehorai, "Newton algorithms for conditional and unconditional maximum likelihood estimation of the parameters of exponential signals in noise," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-40, pp. 1528-1534, June 1992.
- [11] J.F. Bohme, "Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields," *Signal Proc.*, vol. 11, pp. 329-337, December 1986.

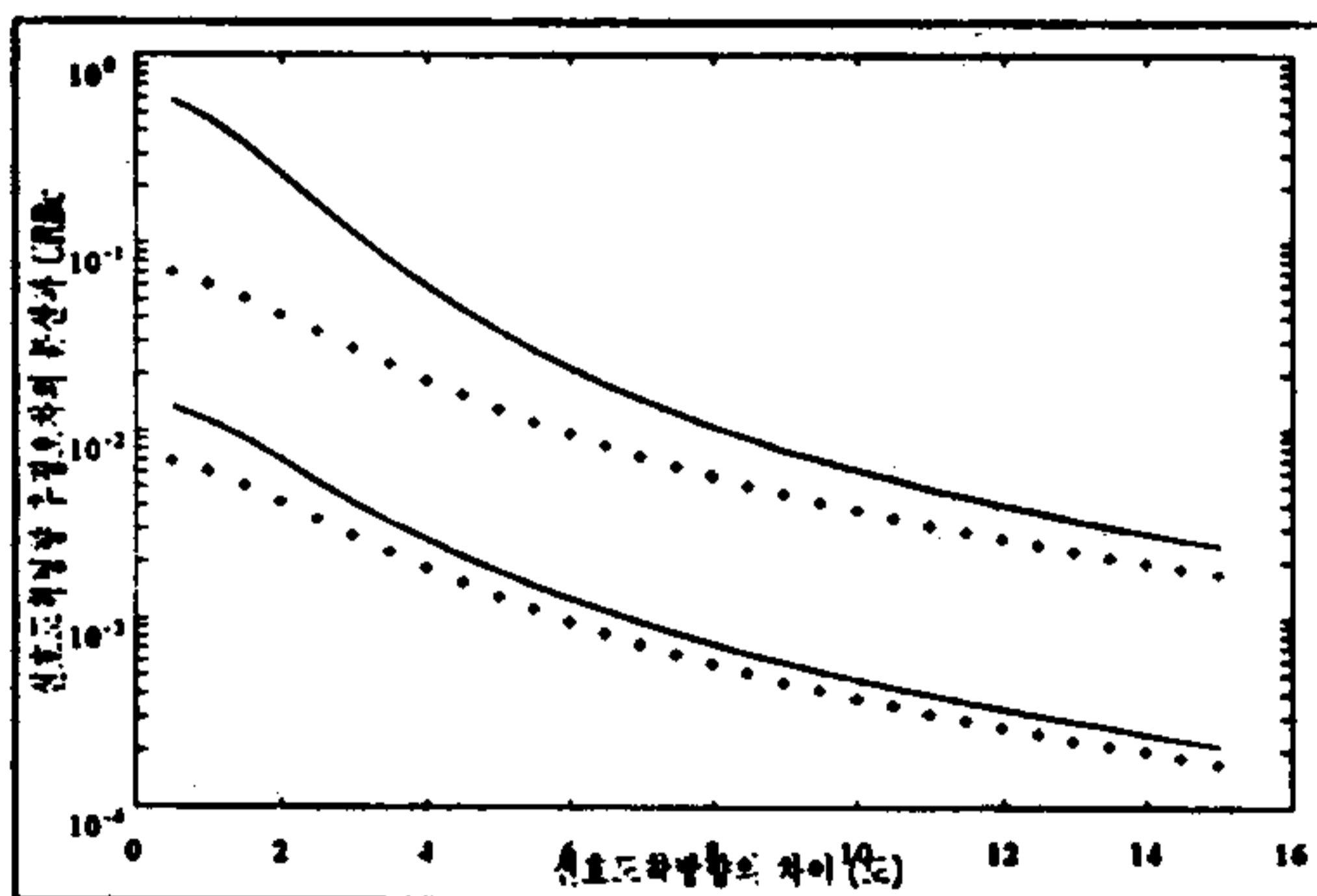


그림 1. $\rho_1 = 0.99, \rho_2 = 0.95, L = 5, N = 100$ 이고, 신호대잡음비=10dB(위), 20dB(아래)일 때 신호도착방향 차이와 신호도착방향 추정오차의 분산(-)과 $CRB_c(+)$

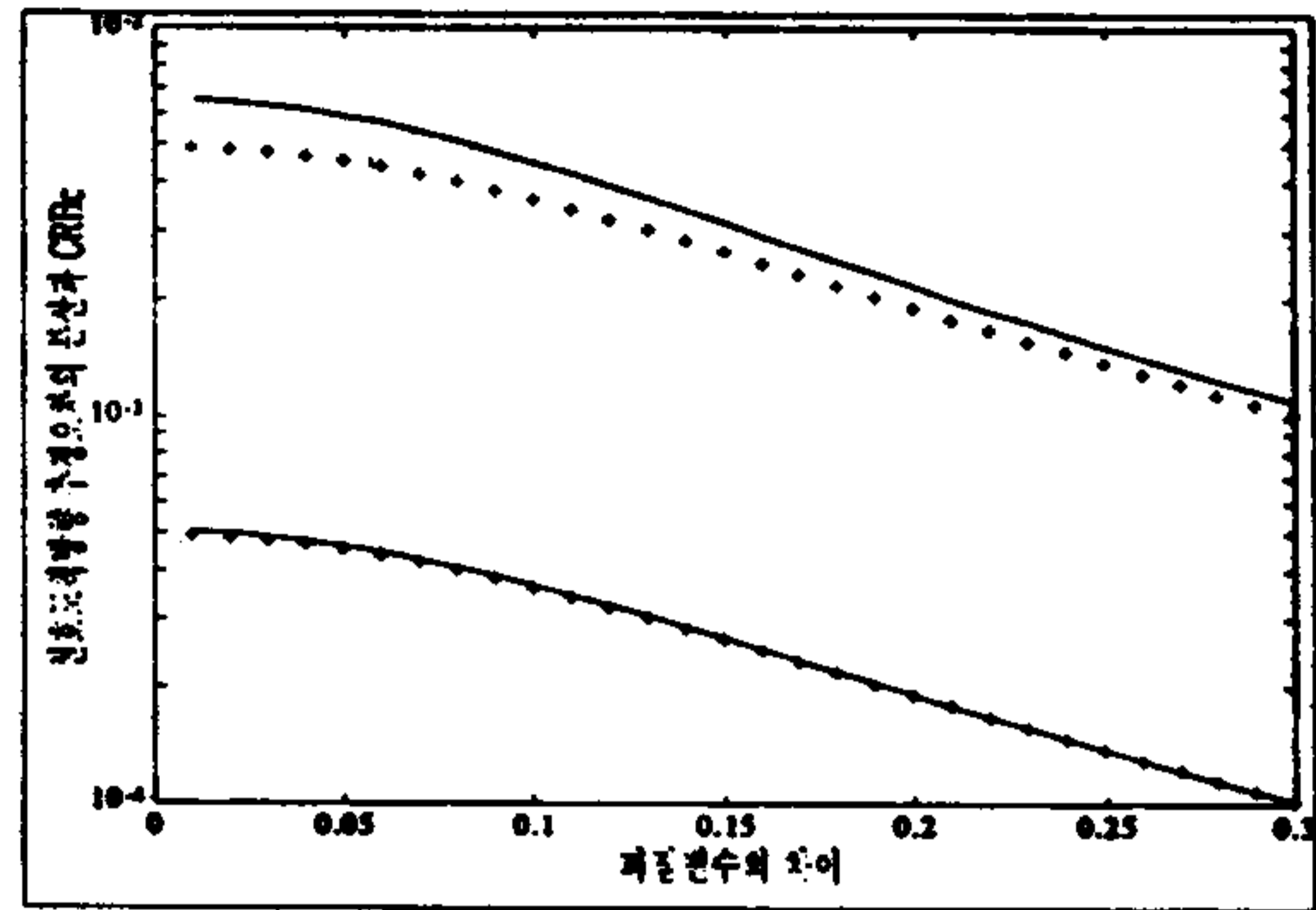


그림 2. $\theta_1 = \frac{3\pi}{18}, \theta_2 = \frac{4\pi}{18}, L = 5, N = 100$ 이고, 신호대잡음비=10dB(위), 20dB(아래)일 때 퍼짐변수 차이와 신호도착방향 추정오차의 분산(-)과 $CRB_u(+)$

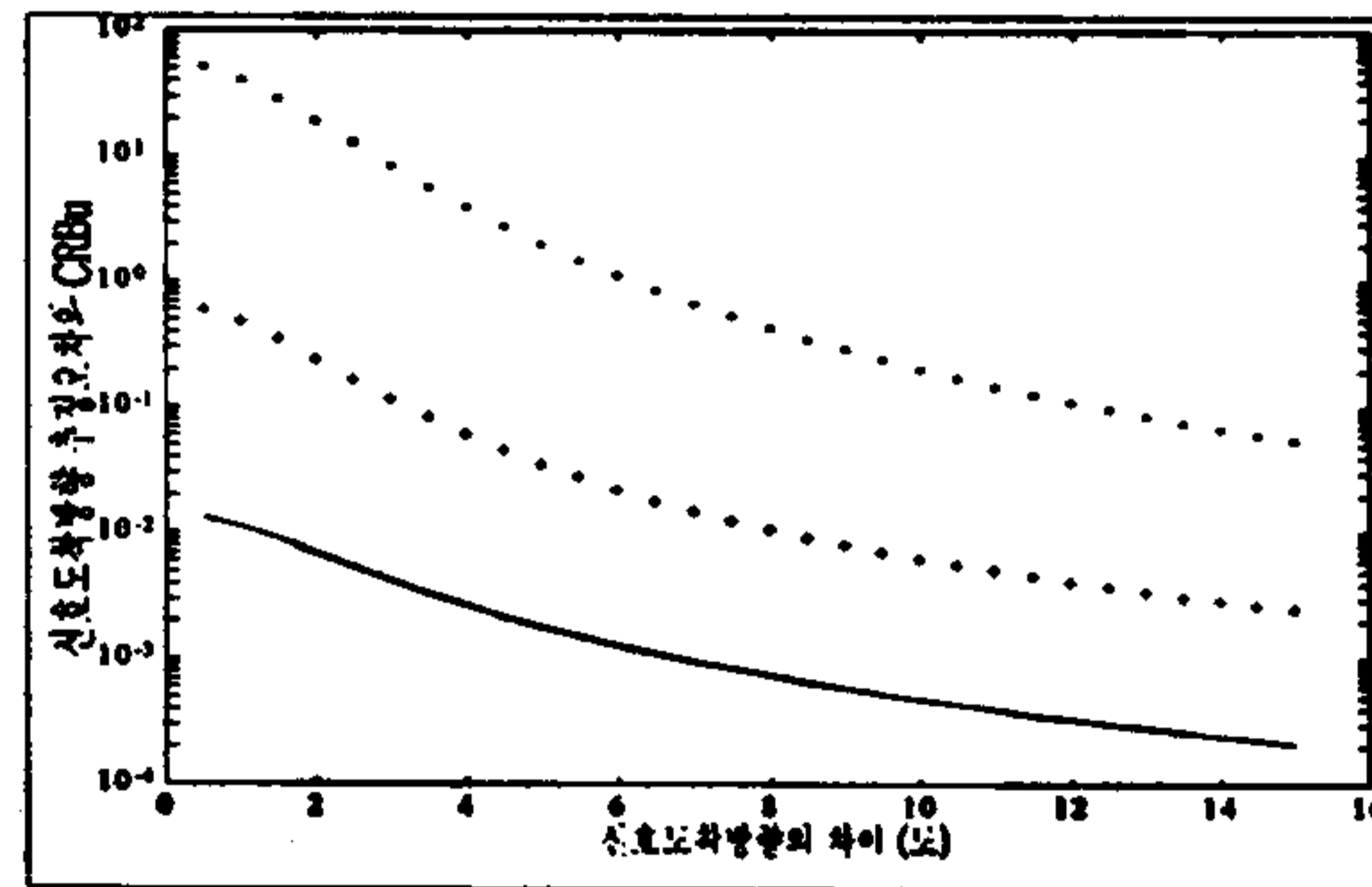


그림 3. $\rho_1 = 0.99, \rho_2 = 0.95, L = 5, N = 100$ 이고, 신호대잡음비=0dB(*), 10dB(+), 20dB(-)일 때 신호도착방향 차이와 신호도착방향 추정오차의 분산(-)과 $CRB_u(+)$

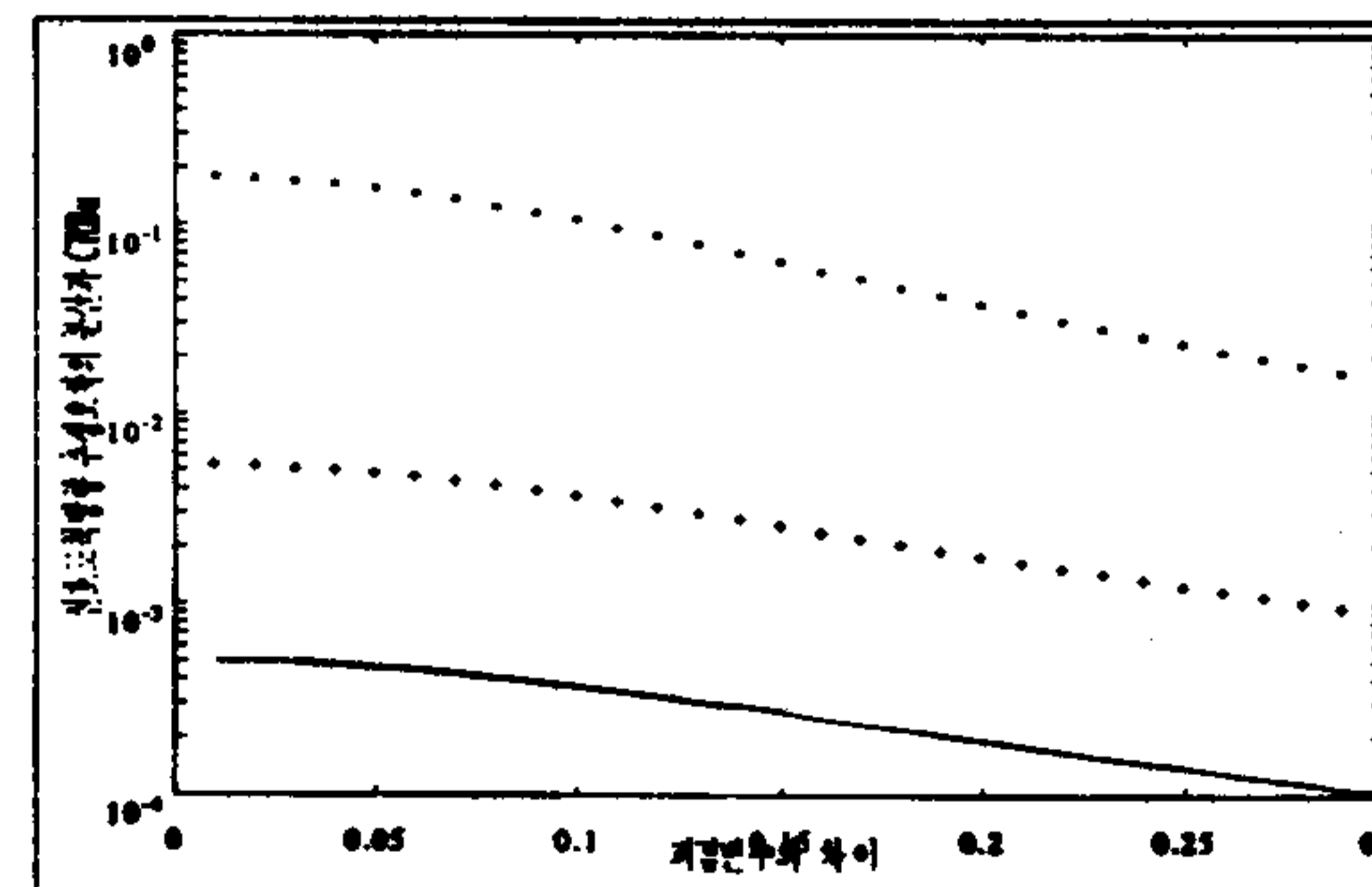


그림 4. $\theta_1 = \frac{3\pi}{18}, \theta_2 = \frac{4\pi}{18}, L = 5, N = 100$ 이고, 신호대잡음비=0dB(*), 10dB(+), 20dB(-)일 때 퍼짐변수 차이와 신호도착방향 추정오차의 분산(-)과 $CRB_u(+)$